日本語学校論集４号
昭和52年３月10日

超楕円的多様体について

吉　原　久　夫

On Hyperelliptic Manifolds

Hisao YOSHIHARA

Abstract

A compact complex manifold M is called a hyperelliptic manifold (for brevity, an h-manifold) if M has a finite unramified covering manifold which is a complex torus. The classification of h-manifolds was established earlier by Italian geometers, when the dimension is 2. We shall study here the structure of higher dimensional h-manifolds. Though there are some new phenomena which cannot occur in the class of surfaces, most of their results can be generalized to higher dimensional case under certain conditions.

§1．序　　論

定義　コンパクト複素数多様体Mは有限不分岐被覆に複素トーラスがある時，超楕円的多様体，略してh－多様体という。

以下Mをh－多様体とする。Mは勿論ケーラー多様体である。

補題１．Mから複素トーラスTへの正則写像　$f: M \to T$　があり，ファイバー $f^{-1}(t) = M_t$，　$t \in T$　が連結非特異なら M_t もまたh－多様体である。

証明．$\widetilde{M}$を複素トーラスで　$p: \widetilde{M} \to M$　は有限不分岐被覆とする。$\varphi = f \circ P - f(P(0))$　は$\widetilde{M}$からTへ準同型写像である。$\varphi^{-1}(0)$ の連結成分で０を含むものは複素トーラスであり，それはM_t の有限不分岐被覆である。Q．E．D．

補題２．Gを$\mathbb{C}^n$のアフィン変換群として，Mは$\mathbb{C}^n/G$と表わすことができる。

証明．$\mathbb{C}^n/L$をMの被覆トーラスとする。Lの元kは　$kz = z + a(k)$,

$z \in \mathbb{C}^n$, $a(k) \in \mathbb{C}^n$, と表わすことができる。Mの基本群$\pi_1(M)$を$\mathbb{C}^n$ の双正則変換群と同一視して とおく。L^* は$\pi_1(M)$

$$L^* = \bigcap_{g \in \pi_1(M)} gLg^{-1}$$

の正規部分群で$|\pi_1(M):L^*|<\infty$である。従って $g \in \pi_1(M)$は$\mathbb{C}^n/L^*$の上の双正則変換となり，L^*も複素トーラスであるからgは$\mathbb{C}^n$上ではアフィン変換である。Q.E.D.

以下Mは$\mathbb{C}^n/G$と表現されているとしよう。G_0をGの元で移動全体から成る，Gの正規部分群とする。$|G:G_0|<\infty$ なので $H=G/G_0$ は有限群でn次のユニタリー群$U(n)$の部分群と見ることができる。またHはMの表現と見られる。つまり双正則同型な2つのhー多様体のHは相似である。そこでHをMのホロノミー表現とよぶことにする。Hの構造はどのようなものであろうか？

例1. $R \to R'$ をコンパクトリーマン面R，R′ の不分岐ガロワ被覆でそのガロワ群は可解でないとする。$j: R \to J(R)$ をヤコビ多様体への自然な写像とする。ガロワ群Kの元gに対して $j \circ g = j(g) \circ j$ となる$j(g) \in \mathrm{Aut}(J(R))$がある。$g$はRに自由に作用するので，$j(g)$も$J(R)$に自由に作用する。よってKは$J(R)$上固定点なしである。

上の注意より一般次元ではHは可解でない。しかし勿論低次元ではHの構造は割合簡単である。$n=2$の時Hは巡回群である。$n=3$の時は少々複雑である。(〔7〕参照)。

またhー多様体の変形はhー多様体であるから，変形によってホロノミー表現がどのようになるか興味あるが，実は相似を法として一定である。この事実を用いると，「同一の微分構造の上に変形で移れない2種類の複素構造をもつ2つの射影的代数多様体の例を求めよ。」という問題に解答を与えることができる。(〔9〕参照)。

さてこの小論では，学会等で発表はされたが，出版になっていない部分またはそれ以後の新しい未発表の結果について述べようと思う。

以下では次の記号を常用する：

$\mathbb{C}^n$のアフィン変換gは $gz = A(g)z + a(g)$, $z \in \mathbb{C}^n$,
$A(g) \in GL(n, \mathbb{C})$, $a(g) = {}^t(a_1(g), \cdots, a_n(g)) \in \mathbb{C}^n$, と表わす。
コンパクト複素多様体Xに対して，

$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}$: Xの構造層

$\Omega^P{}_X = \Omega^P$ ： X上の正則P－型式の芽の層

$\Theta_X = \Theta$ ： X上の正則ベクトル場の芽の層

$q(X) = q = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ ： Xの不正則数

$K_X = K$ ： Xの標準バンドル

§2. Mの構造

まずアルバネーゼ写像 $\alpha : M \to A(M)$ を考えよう。$\mathbb{C}^n$ の適当な基をとることによって $H^0(M, \Omega^1) = \{dz^1, \cdots, dz^q\}$ と仮定してよい。従って α の適当なリフト $\widetilde{\alpha} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^q$ は $\widetilde{\alpha}(z^1, \cdots, z^n) = (z^1, \cdots, z^q)$ である。

$K_1 = \{ g \in G \mid gz^i = z^i, \ i = 1, \cdots, q\}$ とすると，K_1 はGの正規部分群である。$K_0 = K_1 \cap G_0$ とおくと単射 $K_1/K_0 \hookrightarrow H$ があるから，α の各ファイバーは，h－多様体である，（又は補題1を用いてもよい）。ところで K_1 は $\mathbb{C}^q$ の点とは無関係なので各ファイバーは双正則同型である。従ってまず α はバンドルとなっている，（〔4〕の定理を用いてもよい）。

さて q は群Hの単位表現の重複度に等しいから，各 $A \in H$ は $1_q \dotplus A_{n-q}$, $A_{n-q} \in GL(n-q, \mathbb{C})$ と表わせる。$\mathbb{C}^n/G_0$ の自己準同型 ψ_A を $\psi_A z = (A - 1_n)z$ によって定義する。T_0 を $\bigcap_{A \in H} \ker \psi_A$ の0を含む連結成分とする。$K_2 = \{ g' \mid g'z = z + {}^t(a_1(g), \cdots, a_q(g), 0, \cdots, 0),\ g' \in G_0 \}$ とおくと，$T_0 \cong \mathbb{C}^q/K_2$ となる，しかも T_0 は $A(M)$ の有限不分岐被覆である。従って $\alpha^{-1}(O) \times T_0$ はMの有限不分岐被覆である。（正にこの事実によって，トーラスでない h－曲面は射影代数的なのである。）なお，$K_1 \supset [G, G]$ なので $G/K_1 \times K_2$ は有限アーベル群である。以上より次のことが証明された。

<u>定理1.</u> Mは q 次元複素トーラス $A(M)$ 上のファイバーバンドルの構造をもつ，$\alpha : M \to A(M)$。各ファイバーFは h－多様体で構造群はFの有限アーベル的自己同型群である。更に $A(M)$ の適当な有限不分岐被覆 T_0 によって，$F \times T_0$ はMの有限不分岐被覆となる。

<u>系.</u> Gは $\mathbb{Z}^{2q}$ による G_{n-q} の拡大である。但し，G_{n-q} は $n-q$ 次元 h－多様体の基本群である。従って特に $G_{n-q} \supset [G, G]$。

さて定理の証明中に次のことが証明されている。

命題1. 複素トーラスTが次のような部分トーラス T_0 をもつとする。即ち，T上に固定点のない有限自己同型 ψ があって，T_0 は $\psi z-z$ の核であるとする。このときTの部分トーラス T_1 で $T_0\times T_1$ はTと同種となるものが存在する。

注意1. $q\neq n$ なら $\mathbb{C}^n/G_0$ は単純でない。

証明. Hの元Aで，$A-1_n\neq 0$ かつ $A-1_n$ が正則でないものが存在するからである。Q.E.D.

なお，$n=3$ の時は上記ファイバー空間の構造がHとの関係で詳しく分るのであるが，それについては〔8〕を参照。

命題2. Mの部分多様体Nについて，Nの小平次元は非負，$\kappa(M)\geqq 0$，である。更に，もし $\kappa(N)=0$ ならNは h 一多様体である。

証明. $\mathbb{C}^n/G_0$ の部分多様体 $\widetilde{N}$ で $\widetilde{N}\to N$ は有限不分岐被覆写像となるものがある。よって $\kappa(\widetilde{N})=\kappa(N)$ であり，$\widetilde{N}$ については，〔6〕により，$\kappa(\widetilde{N})\geqq 0$ であり，$\kappa(\widetilde{N})=0$ なら $\widetilde{N}$ は $\mathbb{C}^n/G_0$ の部分トーラスの移動である。Q.E.D.

§3. Mの特徴づけ

定理2.（坂根） Xをコンパクトアフィン多様体 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ とする。もし Γ がアーベル群を有限指数に含めばXは h 一多様体である。

証明. Kを上記アーベル群とすると，$\mathbb{C}^n/K$ はトーラスと双正則同型である。(〔5〕参照)。これはXの有限不分岐被覆である。Q.E.D.

定理3.（井草，〔2〕） コンパクト複素多様体Xが曲率0となるケーラー計量をもつなら，Xは h 一多様体である。

定理4. Vを射影的代数多様体とする。Vが h 一多様体Wの上のファイバーバンドル $p: V\to W$ でファイバーFが h 一多様体とすると，V自身 h 一多様体である。

証明. Fも射影代数的なのでpluricanonical 表現 $\mathrm{Aut}(F)\to GL(H^0(F,\mathcal{O}(K_F^{\otimes m})))$ の像は有限群である。従って適当な m について mK_V は自明である。さて，Wがトーラスでない時はWの被覆トーラス W' を考え，W上のVと W' のファイバー積を考えることにすると，W自身トーラスと考えてよい。$\alpha: V\to A(V)$ をアルバネーゼ写像とし，$r: A(V)\to W$ を正則写像で $p=r\circ\alpha$ が成立するものとする。〔4〕によるとVは α が射影写像となるようなA(V)上のファイバーバンドルであり，Vは有限不分岐被覆に $A(V)\times\alpha^{-1}(0)$

をもつ。さて正則写像 $\alpha|_F : F \to r^{-1}(r(0))$ によって，補題1より $\alpha^{-1}(0)$も又，hー多様体である。よってVはhー多様体である。Q.E.D.

定理4は射影代数的という仮定がなくても成立すると予想されるが，今のところその証明はできていない。なお2次元の時，射影直線P^1 の上へのある種のファイバー空間の構造をもつのであるが，この類似は3次元以上では一般になりたたない。しかしHがある特別な型の時には成立する，（〔8〕参照）。

§4. Hについて

$$d_m = \frac{1}{|H|}\sum_{A\in H}(trA)^m,\quad m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\quad M_0=\mathbb{C}^n/G_0 \text{とおく。}$$

命題3. $d_m=\dim H^0(M,(\Omega^1)^{\otimes m})$であり更に $d_1=\dim H^0(M,\Theta)$ かつ $d_2=\dim H^1(M,\Theta)$である。

証明。$A\in H$ の $H^0(M_0,(\Omega^1)^{\otimes m})$，$H^0(M_0,\Theta)$および$H^1(M_0,\Theta)$の上への作用を次のように定義する。$A=(a_{ij})$，$A^{-1}=(b_{ij})$として

$$A(dz^{i_1}\otimes\cdots\otimes dz^{i_m})=\sum_{j_1,\cdots,j_m} a_{i_1j_1}\cdots a_{i_mj_m}dz^{j_1}\otimes\cdots\otimes dz^{j_m}$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)=\sum_j b_{ij}\frac{\partial}{\partial z^j}$$

$$A\left(d\bar{z}^i\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=A(d\bar{z}^i)\cdot A\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=\sum_{s,t}\bar{a}_{is}b_{jt}d\bar{z}^s\frac{\partial}{\partial z^t}$$

この作用を線型的に拡張する。さて $H^0(M,(\Omega^1)^{\otimes m})$，$H^0(M,\Theta)$ および $H^1(M,\Theta)$は，おのおの$H^0(M_0,(\Omega^1)^{\otimes m})$，$H^0(M_0,\Theta)$および$H^1(M_0,\Theta)$のHの各元の作用で不変である元全体からなる部分空間である。従って上の結果を得る。Q。E。D。

系. $d_2\leqq n^2$ であり，$d_2=n^2\Longleftrightarrow G=G_0$

証明．命題3の第3番目の関係から明らかである。Q。E.D.

命題4. $q=n\Longleftrightarrow G=G_0$， もし$q\geqq n-2$ ならHはアーベル群である。

証明．$q=d_1$ は表現Hの単位指標の重複度に等しいから，最初の主張は明らか。$q=n$ 又は $n-1$ のとき，明らかにHはアーベル群である。よって $q=n-2$ の時を考える。$g\in G$ は，$A(g)=1_{n-2}\dot{+}B(g)$，$B(g)\in U(2)$ と表現できる。従って $A(h^{-1}g^{-1}hg)=1_{n-2}\dot{+}B(h^{-1}g^{-1}hg)$ かつ $a(h^{-1}g^{-1}hg)={}^t(0,\cdots,0,a_{n-1},a_n)$ である。さて $h^{-1}g^{-1}hg$ は固定点をもたないから，$B(h^{-1}g^{-1}hg)$ は固有値に1をもつ。そして勿論，$\det B(h^{-1}g^{-1}hg)=1$ である。従って $B(h^{-1}g^{-1}hg)=1_2$ であり，依って $A(gh)=A(hg)$ である。Q．E．D。

Hの構造は非常に興味があるのだが，今のところ難しすぎて全く見当がつかない。

補題3．もし $p\geqq n$ なら，Hの p −Sylow S_p は可換である。

証明。$S_p\subset GL(n,\mathbb{C})$ の表現は，1次表現の n 個の直和か又は p 次既約である。$p>n$ ならO.K．$P=n$ のとき既約とすると，自明でない中心があるから，それは $\lambda 1_n$，$\lambda\in\mathbb{C}$，$\lambda\neq 1$，となって矛盾。Q．E．D．

補題4．Hは $(p_1,\cdots,p_n)$，$p_i\mid p_{i+1}$，型アーベル群を部分群にもたない。また，Hがアーベル群なら $n-1$ 個以下の巡回群の直積である。

証明．もし上のようなアーベル部分群があったとすると，その中の一般の元には固有値1がない。後半は前半から出る。Q．E．D．

Hから $\mathbb{C}^*$ への準同型写像 d，$d(A)=\det A$ を考える。$d(H)$ は $\mathbb{C}^*$ の有限部分群なので巡回群である。d の核を H_1 とおく。

以下しばらく $n=4$ の時にHの構造を調べる。Ω をトーラスの周期とする。このときHの元Aの位数を m とすると，$A\Omega=\Omega N$，$N\in GL(8,\mathbb{Z})$ より，$\varphi(m)\leqq 6$ である。つまり $\varphi(m)=6,4,2$ または1。従って $m=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14$ または18。

補題5．H_1 に位数5の元は存在しない。従って $\#H_1$ は高々 2^a3^b7 である。

証明．位数5の元Aが存在したと仮定して，固有値を1，α，ζ，ζ^i とする。但し ζ，ζ^i，$\bar{\zeta}$，$\bar{\zeta}^i$ は1の原始5乗根の全体。$\det A=1$ より $\alpha=\zeta^{-1-i}$ である。

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Omega \\ \bar{\Omega} \end{pmatrix}N,\qquad N\in GL(6,\mathbb{Z})$$

より，α は2次でなくてはならない，これは矛盾である。Q．E．D．

さて，$\#H_1=2^a3^b$ の時，H_1 は可解よってHも可解である。よって $\#H_1=2^a3^b7$ の時可解かどうか調べる。H_1 の7−Sylow群をSとして生成元をA

とする。Aを対角化して　$A=1\dotplus\zeta\dotplus\zeta^2\dotplus\zeta^4$，$\zeta$は1の原始7乗根，となる。なぜなら　$\det A=1$だから。

<u>補題6.</u>（Burnside，〔1〕）　Kを有限群，Pをそのp－Sylowとする。Pがその正規化群　$N_H(P)$の中心に含まれるならば，Kは$K/N\cong P$となる正規部分群をもつ。

この補題によって，H_1が可解であることをいうには，H_1 の任意の元Bに対して　$BAB^{-1}=A^k$，$1\leqq k\leqq 6$，なら$k=1$をいえばよい。なぜなら，この時補題6によって，$\#N=2^a3^b$ となるNが存在して，このNも矢張りBurnsideの定理によって可解だからである。さて　$BAB^{-1}=A^k$としよう。AとA^kの固有値は全体として等しいから，$k=1$，2又は4でなければならない。ところで$k=2$と仮定すると，$BAB^{-1}=A^2$　より

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad B^3=\begin{pmatrix} a^3 & & & O \\ & bcd & & \\ & & bcd & \\ O & & & bcd \end{pmatrix}$$

さて　$\det B=1$よりBは位数9とはなりえない。故に$B^3=1_4$　である，即ち$a^3=1$，$bcd=1$。また　$\det B=abcd=1$。従って　$a=1$。そこで$1\dotplus\alpha\dotplus\beta\dotplus\gamma$，但し，$b=\alpha/\gamma$，$c=\beta/\alpha$，$d=\gamma/\beta$で$H_1$の相似変換をして，上記Bは　$a=b=c=d=1$　と仮定してよい。すると　$gz=Az+{}^t(a_1,a_2,a_3,a_4)$，$hz=Bz+{}^t(b_1,b_2,b_3,b_4)$について

$$h^{-1}g^{-1}hgz=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \zeta^{-1} & & \\ & & \zeta^{-2} & \\ & & & \zeta^{-3} \end{pmatrix} z+\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

となるのでこれは固定点をもつ。以上より$k\neq 2$である。$k=4$の時と上と全く同様にできる。従って$k=1$である。まとめて下記が証明された。

<u>定理 5.</u>　$n=4$の時，Hは可解である。

ところで$n=5$の時もHが可解を証明できるのであるが，少々長いのでここで

は省略することにする。一般次元ではHは可解でないので次のことが問題となろう。

問題1. Hが可解とならない最小のnはいくつか？

補題7. $H\subset U(n)$が既約表現である必要十分条件は $h^{1,1}=\dim H^1(M,\Omega^1)=1$である。

証明. $H^1(M_0,\Omega^1)$の上への$A\in H$の作用を次のように定義する：

$$\omega=\sum_{ij} c_{ij}\,dz^i\wedge d\bar{z}^j\in H^1(M_0,\Omega^1) \text{ に対して}$$

$$A(\omega)=\sum_{ijst} c_{ij}\,a_{is}\,\bar{a}_{jt}\,dz^s\wedge d\bar{z}^t,$$

但し，$A=(a_{st})$。 すると$H^1(M,\Omega^1)$はHの各元の作用で不変な$H^1(M_0,\Omega^1)$の元から成る部分空間である。従って

$$\dim H^1(M,\Omega^1)=\frac{1}{|H|}\sum_{A\in H}(trA)\cdot(tr\bar{A})=\frac{1}{|H|}\sum_{A\in H}(trA)\cdot(trA^{-1})$$

Q.E.D.

補題8. もしMが因子をもち $h^{1,1}=1$ なら，Mは射影代数的である。

証明. M上の素因子Dをとる。Mはケーラー的で$q=0$だから，Dは$H^2(M,\mathbb{Z})$の元としてtorsionはない。〔D〕をDから決まる直線バンドルとして，C(〔D〕)を〔D〕のチャーン類とする。この時$b=C$(〔D〕)は$H^1(M,\Omega^1)$の生成元であり，bをもとにしてM上にHodge計量を定義できる。Hodge計量の作り方については，Kodaira－Morrow 〔3〕を参照。Q.E.D.

注意2. Mが因子をもつ必要十分条件はMの代数次元が1以上であることである。

証明. M_0については上のことが成りたつからよい。Q.E.D.

定理6. Mが因子をもつなら，ホロノミー表現$H\subset U(n)$は可約である。

証明. 補題7と8により，Mが射影代数的の時 $h^{1,1}>1$ を証明すればよい。さて $h^{1,1}=1$と仮定しよう。この時$q=0$ よってM_0は単純でないアーベル多様体である。よって A_1，A_2を0でないアーベル多様体として，$r: A_1\times A_2\to A$なる有限不分岐被覆がある。D_iをA_iの上の素因子とする，$i=1,2$。この時$a(D_1\times A_2)$と$b(A_1\times D_2)$，$a,b\in\mathbb{Z}$，$ab\neq 0$，は$A_1\times A_2$上の因子であり代数的同値ではない。従って$ar(D_1\times A_2)$と$br(A_1\times D_2)$はM

上の因子で，1次同値ではない。よってMのピカール数は1より大きく，従って $h^{1,1}>1$ である。これは矛盾である。Q.E.D.

ところで定理6は，Mが因子をもたない場合にも成立すると予想されるが，今のところ証明できていない。

注意3. 一般に $d_2 \geqq q(q+1)/2$ がなりたつ。また $n=3$ では $q=0$ の時 $d_2=2$ 又は3 であった，〔8〕。即ち $n\leqq 3$ ではいつでも変形が存在したのであるが，$n=4$ では $d_2=0$ のことがある。例えば，
$A(g)=1\dotplus\omega\dotplus\omega\dotplus\omega$，$a(g)={}^t(1/3,\ 0,\ 0,\ 0)$，$A(h)=\omega\dotplus 1\dotplus\omega\dotplus\omega^2$，
$a(h)={}^t(0,\ 1/3,\ 1/3,\ 1/3)$，ここで $\omega=\exp(2\pi\sqrt{-1}/3)$。また，

$$\Omega=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 & (1-\omega)/3 & & & 0 \\ & 1 & & & & (1-\omega)/3 & & \\ & & 1 & & & & (1-\omega)/3 & \\ 0 & & & 1 & 0 & & & (1-\omega)/3 \end{pmatrix}$$

によって決る移動を $k_1,\cdots,k_8$ とするとき，$g,h,k_1,\cdots,k_8$ で生成されるアフィン変換群をGとする。この時，$M=\mathbb{C}^4/G$ は射影代数的 h 一多様体で，$H^1(M,\Theta)=0$ であり，$3K=0$ である。

問題2. $\dim H^1(M,\Theta)\geqq 2h^{2,0}$ がなり立つと予想される，従って変形をもたないなら射影代数的と予想される。（勿論Hが可換の時はこの予想は正しい。）

さて R を $\bigoplus_m H^0(M,(\Omega^1)^{\otimes m})$ から決る対称多元環とする。（$(\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n])^H$ を多項式環 $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$ のH不変な元全体からなる部分環とすると，$R\stackrel{\sim}{\to}(\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n])^H$ である。このことから $m\geqq|H|$ なら $d_m\geqq n$ である。

注意4. $n=3$ の時 $q=0$ なら M_0 は3個の楕円曲線の直積と同種と言えた。しかし $n=4$ のとき既にこの事と同様な事は言えない。また $q=0$ でも $\dim H^2(M,\Theta)=0$ とも言えないし，M_0 はアーベル多様体にならないこともある。たとえば，

$A(g)=1\dotplus(-1)\dotplus(-1)\dotplus(-1)$，　$a(g)={}^t(1/2,\ 0,\ 0,\ 0)$

$A(h)=(-1)\dotplus 1\dotplus(-1)\dotplus(-1)$，　$a(h)={}^t(0,\ 1/2,\ 1/2,\ 0)$

$$\Omega=\begin{pmatrix}1 & & O & \sqrt{-1} & 0 & 0 & 0\\ & 1 & & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 0\\ & & 1 & 0 & 0 & \sqrt{-2} & \sqrt{-5}\\ O & & 1 & 0 & 0 & \sqrt{-3} & \sqrt{-7}\end{pmatrix}$$
，Ωによって決る移動を

$k_1, \cdots, k_8$ とし，g，h，$k_1, \cdots, k_8$ で生成されるアフィン変換群をGとする。この時 $M=\mathbb{C}^4/G$ の代数次元は2であり，$\dim H^2(M, \Theta)=1$ である。勿論M_0 はアーベル多様体にならない。

$n=3$ の時の〔8〕に対する補足として次のことが分る。

命題 5. 2次元複素トーラスTが位数5又は10の自己同型をもてば，それは単純アーベル多様体である。

証明. Tがアーベル多様体になることは簡単に分る。例えば，Tをもとにして Hの位数が5又は10となる3次元hー多様体を作ることができ，それは射影代数的であるからである。さて，$T=\mathbb{C}^2/\Omega$であるとしよう。自己同型Aを対角化して $A=\zeta\dotplus\zeta^k$，ζは1の原始m乗根，$m=5$又は10，と表わす。但しkはそれぞれ2又は3とする。

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24}\end{pmatrix}$$
とするとき，$\omega_{1i}\neq 0$かつ$\omega_{2i}\neq 0$となる

$1\leqq i\leqq 4$ が在存する。もしそうでないとすると，Ωは直積型となり，楕円曲線が4次整数の虚数乗法をもつことになり不可能である。そこで$P=1/\omega_{1i}\dotplus 1/\omega_{2i}$ によって全体を相似変換して上記Ωにおいて，$\omega_{11}=\omega_{21}=1$と仮定してよい。$\Omega$の生成するlatticeをLとすると，

$$L\ni\begin{pmatrix}\zeta\\ \zeta^k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\zeta^2\\ \zeta^{2k}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\zeta^3\\ \zeta^{3k}\end{pmatrix}$$

である。従って

$$\Omega'=\begin{pmatrix}1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3\\ 1 & \zeta^k & \zeta^{2k} & \zeta^{3k}\end{pmatrix}$$

として，Ω' の生成するlatticeをL′とする。$|L:L'|<\infty$であり，Tと$T'=\mathbb{C}^2/\Omega'$は同種である。さてTが単純でないと仮定するとT′についてもそうである。$(1,\lambda)$，$(1,\mu)$を周期とする楕円曲線の積と同種であるとして，

$$\begin{pmatrix}a & a\lambda & c & c\mu\\ b & b\lambda & d & d\mu\end{pmatrix}$$

による lattice を L″ とすると，$L''_{\mathbb{Q}}=L'_{\mathbb{Q}}$ であるから，まず λ，$\mu\in\mathbb{Q}(\zeta)$ である。また2つの楕円曲線は虚数乗法をもつから，λ，μ は $\mathbb{Q}$ 上2次である。しかるにガロワ理論によれば $\mathbb{Q}(\zeta)$ の2次の元は実数でなければならない。これで矛盾である。Q．E．D．

注意 5. 2次元複素トーラスが位数8又は12の自己同型をもつ時は，単純でないアーベル多様体である。なぜなら上のように作られる Ω' 自身が，自己同型の固有値の次数が4の時，2つの同一の楕円曲線の直積であり，位数12だが固有値の次数が2の時はTが直積型と同種は明らかである。

§5．反省と展望

定理1によると h ー多様体の幾何学的構造は一応解明されたかの印象をもってしまうかも知れないが，実は殆ど何も分ってないとも言える。なぜならファイバーになる $q=0$ の h ー多様体の構造が少しも分らないからである。$n\geqq 4$ の時，$q=0$ の h ー多様体を究明しなくてはならない。それと平行して，Hの群論的構造も解かれなくてはならない。また次の予想も長らく気になっている。

予想. コンパクトアフィン多様体はケーラー計量をもつなら，h ー多様体であろう。

その他にも未解決の問題は山積している。たとえばトーラスTを定めた時に，Tを被覆にもつ h ー多様体がどれだけ可能かを判定する方法も見つけなくてはならない。またアーベル多様体Aの $\mathrm{End}_0(A)$ は良く研究されているが，Aの双正則自己同型全体の作る群構造は詳しくは研究されていない様である。未解決問題が沢山あるということは，それが肥沃な分野であるということであり喜こばしいことなのであろう。既成の理論がこの分野に対してどれだけ有力であるかも疑問であるが，とにかく一歩一歩前進しなくてはならない。

終りに，これまで沢山の指導をして下さいました東京大学飯高茂教授に心から感謝の意を表します。

文　　献

[1] M. Hall: The theory of groups. Macmillan, 1959.
[2] J. Igusa: On the structure of a certain class of Kähler varieties. Amer. J. Math., 76 (1954), 669-678.
[3] K. Kodaira and J. Morrow: Complex Manifolds. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1971.
[4] Y. Matsushima: Holomorphic vector fields on compact Kähler manifolds. Amer. Math. Soc., 1971.
[5] Y. Sakane: On compat affine manifolds. to appear.
[6] K. Ueno: Classification of algebraic varieties I. Compositio Math., 27 (1973), 277-342.
[7] K. Uchida and H. Yoshihara: Discontinuous groups of affine transformations of $\mathbb{C}^3$. Tôhoku Math. J., 28 (1976), 89-94.
[8] H. Yoshihara: On hyperelliptic threefold.
日本数学誌「数学」（岩波書店）第28巻4号，（1976），359−361．
[9] H. Yoshihara: On deformations of hyperelliptic manifolds. to appear in Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry. Kyoto. 1977.