多くの自己同型をもつ複素トーラスの構造

吉 原 久 夫

The Structure of Complex Tori with Many Automorphisms

Hisao YOSHIHARA

Abstract

Let T be an n-dimensional complex torus with an automophism g. Let $A \in GL_n(\mathbb{C})$ be the complex representation of g and $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be the eigenvalues of A. Then it is clear that α_i, i=1, . . . , n, are units of algebraic number fields of degree $\leq 2n$. It seems to be interesting to study the structure of T in case α_i, i=1, . . ., n, have degree 2n. We have studied the structure in detail when n=2, [3], [4], so in this note we try to investigate the structure when $n \geq 3$.

§ 1. 序 論

楕円曲線がnon-trivialな自己同型εをもてば，この楕円曲線はεによって一意に決まってしまうという，いちじるしい性質がある。これは新事実ではないが，三つの面白い証明を，高次元への参考の為にも書いておこう。

定理1.1. 楕円曲線Eがnon-trivialな自己同型εをもつなら，Eは周期$(1, \varepsilon)$をもつ楕円曲線$\mathbf{C}/(1, \varepsilon)$と同型である。

証明(その1) EをWeierstrassの標準形 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ で表わしておいて，J_EをEの不変量 $g_2{}^3/(g_2{}^3 - 27g_3{}^2)$とする。なおEのnon-trivialな自己同型は $e_n = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$，$n = 3, 4, 6$，きり

ない。さて

Eがe_4を自己同型にもつ$\Longleftrightarrow g_3=0 \Longleftrightarrow J_E=1$

Eがe_6（又はe_3）を自己同型にもつ$\Longleftrightarrow g_2=0 \Longleftrightarrow J_E=0$

がなりたつ。なお $C/(1,\varepsilon)$はεを自己同型にもつから，定理がなりたつ。
Q.E.D.

（その2） $E=C/L$, $L=[1,a]$として，$L_0=[1,\varepsilon]$とおく。Lがεを自己同型にもつことから，$L\supset L_0$。また$|L:L_0|<\infty$より $a=p+q\varepsilon$, p, $q\in Q$ である。再びLがεを自己同型にもつ仮定から，

$$\varepsilon(1,a)=(1,a)\begin{pmatrix}-p/q & (-p^2+pqd-q^2)/q \\ 1/q & (p-qd)/q\end{pmatrix}$$

但し $\varepsilon^2+dx+1=0$, $d=0, \pm 1$, とする。

従って $m, n\in Z$ によって $q=1/n$, $p=m/n$ である。勿論 $(-p^2+pqd-q^2)/q=(-m^2+md-1)/n$も整数である。ところで，$a$は楕円曲線の基本領域D内に取ってあるとしてよい。つまり $|p|\leqq 1/2$, $q\geqq 3/2$。

(イ) $d=0$ のとき。 $a=\dfrac{m}{n}+\dfrac{1}{n}-1\in D$より， $n=1$。よって $m=0$。つまり $a=\varepsilon$。

(ロ) $d=1$ のとき。 $\varepsilon=(-1+\sqrt{-3})/2$ より $a=(2m-1+\sqrt{-3})/2n$。 $a\in D$だから $n=1$。従って $m=0$，つまり $a=\varepsilon$。

(ハ) $d=-1$ のとき。 (ロ)と同様。 Q.E.D.

（その3） 上記のように，$L=[1,a]$, $L_0=[1,\varepsilon]$とする。Lはεを自己同型にもつから $\varepsilon L=L$ である。即ちLは虚2次体 $Q(\varepsilon)$のideal である。ところで $Q(\varepsilon)$の種類は1であるから，適当な $\lambda\in Q(\varepsilon)$によって $L=\lambda L_0$ がなりたつ。つまりEは C/L_0 と同型。 Q.E.D.

さて，2次元以上の時も，多くの自己同型をもったら，それは底空間である複素トーラスに大きな影響を及ぼしている筈である。このideaを明確にすると次のようになろう。

問題1.2. Tをn次元複素トーラスとして，Tは自己同型gをもち，gの複素表現を $A\in GL_n(C)$として，この固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする。この時，一般に $|Q(\alpha_i):Q|\leqq 2n$, $i=1, \cdots, n$，であるが，あるiに対して $|Q(\alpha_i):Q|=2n$のとき（このすべてのjについてα_jはQ上 $2n$ 次になる。）

TはAによってどれだけの影響をうけるか？

上記の問題について，$n=2$のとき，筆者は昨年末から調べたところ，若干の面白い結果を得た。それらの大要は今年の秋の学会で発表され，又詳細は論文〔3〕,〔4〕,にあるが，この論文ではそれらに割愛された部分，または，それ以降の新しい結果の紹介および偏見に満ちた(?)問題提起をしよう。

全体を通して次の記号を使うとする。$K=\mathbf{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\overline{\alpha}_1,\cdots,\overline{\alpha}_n)$ $G=\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$。 $F=\mathbf{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$。 $r(T)$ はトーラスTのrankを表わすとする。これはT上の有理型函数全体の作る体の$\mathbf{C}$上の超越次元に等しい。

§ 2. $n=2$ の時

この時は$r(T)$はGの構造からほとんど決定されてしまう。特にTが単純アーベル多様体のときは　$S=\mathbf{C}^2/\Omega$

$$\Omega=\begin{pmatrix}1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3\\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta\end{pmatrix}\quad,\quad \zeta=e_5\ ,$$

と同種であり，$|\alpha_1|,|\alpha_2|<2$ ならTはSと同型になってしまう,（〔4〕).
そこでSを特長づけると思われる性質を1つ。

<u>命題2.1.</u> Sはprincipal polarization をもつ。

<u>証明.</u> $\lambda=(\zeta-\zeta^2+\zeta^3-\zeta^4)/5$とおくと，$\overline{\lambda}=-\lambda$かつ $\lambda^2\in\mathbf{Q}(\sqrt{5})$であり，$\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q})$，$\sigma:\zeta\to\zeta^2$ とすると， $I_m\lambda>0$ かつ $I_m\sigma(\lambda)>0$ である。そこで $z=(z_1,z_2)$，$w=(w_1,w_2)$に対して，

$$E(z,w)=\lambda(z_1\overline{w}_1-\overline{z}_1w_1)+\sigma(\lambda)(z_2\overline{w}_2-\overline{z}_2w_2)$$

とおく。すると

$$\begin{aligned}E((\zeta^a,\zeta^{2a}),(\zeta^b,\zeta^{2b}))=&\lambda(\zeta^{a-b}-\zeta^{-a+b})\\&+\sigma(\lambda)(\zeta^{2(a-b)}-\zeta^{2(-a+b)}).\end{aligned}$$

この値は $a\not\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 5)$に対して±1のいずれかである。従ってEはS上のnon-degenerate Riemann form を定義し，Ω上での値が±1なのでEはSのprincipal palarizationを定める。

この命題より次の疑問が出る。

問題2.2. 単純アーベル曲面が4次の自己同型をもち，principal polarizationをもてば，Sと同型であるか。

注意2.3. $x^2-(1+\sqrt{-1})x+1=0$ の2根をα，βとおく。そこで

$$\Omega_1=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3\\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3\end{pmatrix}, \qquad \Omega_2=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3\\ 1 & \overline{\beta} & \overline{\beta}^2 & \overline{\beta}^3\end{pmatrix}$$

$X_i=C^2/\Omega_i$，$i=1$，2，とおくと，$r(X_1)=2$，$r(X_2)=0$ である。なぜなら，X_1，X_2は各々4次の自己同型

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \overline{\beta}\end{pmatrix}$$

をもつが，$\alpha\beta=1$，$\alpha\overline{\beta}$は1の根でないので，(Theorem 3,〔3〕)。
なおこの例では，X_1は非単純アーベル曲面であり，Gは位数8の二面体群である。更に次のことも分る。

“T_i，$i=1,2$，を$2n$次の自己同型A_iをもつn次元トーラスとして，A_iの1つの固有値をα_iとする。そこで $Q(\alpha_1)\cong Q(\alpha_2)$となったとする。もし$T_i$の一方が単純アーベル多様体であれば，命題3．4により他方はアーベル多様体になることが分る。しかるに一方をアーベル多様体と仮定しただけでは，他方は必ずしもアーベル多様体にならない。”

従ってTとAの関係を調べるとき，体K又はFまで見る必要がある。なお，2次元ではFで十分である。

定理2.4. $n=2$のとき，$r(T)=2 \Longleftrightarrow |F:Q|=4$。

証明。Theorem 1,〔3〕によると $r(T)=2 \Longleftrightarrow Q(\alpha_1)\ni\alpha_2$ だからである。

§3. 一般次元の時

補題3.1. Hをアーベル多様体上のnon-degenerate Riemann formとすると，任意のRiemann formH'に対して，定数$\lambda>0$によって，$\lambda H(z,z)\geqq H'(z,z)$ とできる。

証明. 基底を定めたとき，H，H'で対応するHermitian行列をも表わすとする。さてHは正定値より，正則行列Pによって

$$ {}^t\overline{P}HP = 1_n, \quad {}^t\overline{P}H'P = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}, \ \beta_i \geqq 0, \ i = 1, \cdots, n, $$

とできる。そこで$\lambda \geqq \max(\beta_i)$とすると，$\lambda\,{}^t\overline{P}HP - {}^t\overline{P}H'P \geqq 0$。
${}^t\overline{P}(\lambda H - H')P \geqq 0$。即ち任意のベクトルWに対して，${}^t\overline{W}\,{}^t\overline{P}(\lambda H - H')PW \geqq 0$。つまり$z = PW$として ${}^t\overline{z}(\lambda H - H')z \geqq 0$。 よって $\lambda H \geqq H'$
Q.E.D.

<u>補題3.2.</u> Hを複素トーラス V/L 上のdominat Riemann form, H'をこの上の任意のRiemann formとすると，定数$\lambda > 0$によって，$\lambda H(z, z) \geqq H'(z, z)$ とできる。

<u>証明.</u> $V_1 = \{ z \in V \mid H(z, z) = 0 \}$とする。 $V^* = V/V_1$とおいて，LのV^*への像をL^*とすると，V^*/L^*はアーベル多様体で，Hは自然にV^*/L^*上のnon-degenerate Riemann formになる。勿論H'はV^*/L^*上のRiemann formになるので上の補題を用いればよい。 Q.E.D。

<u>定理3.3.</u> n次元複素トーラスTのrankをrとする。このトーラスの自己同型の（複素表現の固有値の）次数は$\max\{2r, 2(n-r)\}$以下である。 従って特に，Tが$2n$次の自己同型をもてば，$r = n$又は0である。

<u>証明.</u> HをTのdominant Riemann form，$A \in GL_n(\mathbf{C})$をTの自己同型の複素表現とする。$A^*H(z, w) = H(Az, Aw)$もT上のRiemann formである。よって補題3.2.から $\lambda H \geqq A^*H \geqq 0$ である。つまり $z \in V_1 \Longrightarrow Az \in V_1$。 よって$AV_1 = V_1$。 従って適当なVの基をとれば

$$ A = \begin{pmatrix} A_1 & A' \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} $$

と表わせ，A_2はV^*/L^*上の自己同型をinduceする。ここでA_2の大きさはrであるから上の結果を得る。 Q.E.D.

以下，Tは$2n$次の自己同型をもつとする。このときTはいつアーベル多様体であるかという問題が起る。注意2.3によれば $Q(\alpha_i)$ を調べるだけでは不十分であり，Fまで調べる必要がある。しかしα_iが特別なときはその必要はない。

<u>命題3.4.</u> $\alpha_1 \cdots, \alpha_n, \overline{\alpha}_1, \cdots, \overline{\alpha}_n$のいずれか1つの$\alpha$に対して，$Q(\alpha)$

がCM一体なら，$r(\mathrm{T})=n$ である。従ってGがアーベル群なら $r(\mathrm{T})=n$ であり，特にAが有限位数なら $r(\mathrm{T})=n$ である。

<u>証明.</u> Shimura-Taniyama §6，〔2〕の結果を用いれば明らか。

さて2次元の時にならって，Gと r との関係を解明することが1つの大きな問題である。$n=2$ の時はGの構造は簡単だからうまく行ったが，一般の時はGは複雑すぎる。しかし次のような一般化は成立する。

<u>定理 3.5.</u> $\mathbf{Q}(\alpha_i,\alpha_j)$ が $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ 上 $2n-1$ 次となるような i，j の組があるなら，$r(\mathrm{T})=0$ である。従って特にGが $2n$ 次の対称群であるか 又は交代群であるときは $r(\mathrm{T})=0$ である。

<u>証明.</u>

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{2n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{2n-1} \\ & & & \cdots & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{2n-1} \end{pmatrix}$$

とおくと，Tは $\mathbf{C}^n/\Omega$ を有限被覆にもつ。よって $\mathbf{C}^n/\Omega$ についてrank＝0 をいえばよい。さて $\mathbf{C}^n/\Omega$ がnon-degenerate Riemann form をもつと仮定すると，$\Omega \mathrm{C}\, {}^t\Omega=0$ となる $2n\times 2n$ 次の整係数交代行列Cが存在する。この条件を成分で書くと，　$\mathrm{C}=(c_{ke})$，　$c_{ke}=-c_{ek}\in\mathbf{Z}$　として，

$$\sum_{1\leqq k,\, e\leqq 2n} c_{ke}\alpha_i^{k-1}\alpha_j^{e-1}=0$$

従って，

$$\sum_{1\leqq k<e\leqq 2n} c_{ke}(\alpha_i^{k-1}\alpha_j^{e-1}-\alpha_i^{e-1}\alpha_j^{k-1})$$

$$=\sum_{1\leqq k<e\leqq 2n}(\alpha_j-\alpha_i)c_{ke}(\alpha_i\alpha_j)^{k-1}\ \frac{\alpha_j^{e-k}-\alpha_i^{e-k}}{\alpha_j-\alpha_i}=0$$

$\alpha_j\neq\alpha_i$ であるから，

$$\sum_{1\leqq k<e\leqq 2n} c_{ke}\{\alpha_j^{e-2}\alpha_i^{k-1}+\alpha_j^{e-3}\alpha_i^{k}+\cdots+\alpha_j^{k-1}\alpha_i^{e-2}\}=0$$

さて，これをα_jについて整理すると，

$$\Big(\sum_{1\leqq k<2n} c_{k2n}\alpha_i^{k-1}\Big)\alpha_j^{2n-2}+\Big\{\sum_{1\leqq k<2n} c_{k2n}\alpha_i^{k}$$
$$+\sum_{1\leqq k<2n-1} c_{k2n-1}\alpha_i^{k-1}\Big\}\times\alpha_j^{2n-3}+\cdots$$
$$+\Big(c_{12}+\sum_{1\leqq k<3} c_{k3}\alpha_i^{k}+\cdots+\sum_{1\leqq e<2n} c_{1e}\alpha_i^{e-2}\Big)=0$$

ところで，仮定により $|Q(\alpha_i,\alpha_j):Q(\alpha_i)|=2n-1$。従って α_j^p の各係数は0。更にα_iはQ上$2n$次であるから，すべての$c_{ke}=0$。これでは$C=0$となってしまって矛盾である。従って定理3.3を用いればTのrankは0である。

なお後半については，対称群と交代群が定理の条件を満すからよい。

Q.E.D.

ところで，2次元のときの次のようなもう一方の一般化は未解決である。

<u>問題3.6.</u> $Q(\alpha_1)/Q$がガロワ拡大なら$r(T)=n$であるか。これは勿論2次元のとき成立している。

別の方面からの$r(T)=n$となる一つの条件として次の主張がなりたつ。

<u>定理3.7.</u> すべてのi，$1\leqq i\leqq n$，に対して同時に $|\alpha_i|\leqq 1$ 又は$|\alpha_i|\geqq 1$ なら$r(T)=n$である。

<u>証明</u> $|\alpha_i|\leqq 1$ ならα_iのすべての共役の絶対値は1以下であり，α_iは1の根である。従って命題3.4によって$r(T)=n$である。$|\alpha_i|\geqq 1$ のときは自己同型A^{-1}を考えればよい。 Q.E.D.

もう一つの話題として，moduliの問題がある。しかし$2n$次の自己同型をもつn次元トーラスの集合を考えたのでは，analytic familyにならないであろう。なぜなら自己同型Aのとり方は高々可算であり，定理3.5の証明中に与えられた，Aの固有値による典型的周期をΩとするとき，C^n/Ω と同種なトーラスも高々可算個である。従ってこのようなトーラスの集合Fの同型類は高々可算

個である。つまりmoduli空間には高々可算個の点があるにすぎない。しかし例えばnon-trivialな自己同型をもつ全体の集合というときはmoduli 空間の次元が出てくる。例えば

$$\Omega_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & s & \lambda & \lambda s \\ t & 1 & \overline{\lambda} t & \overline{\lambda} \end{pmatrix}, \quad s\overline{t} \neq 1, \lambda = e_m, \quad m = 3 \text{ or } 4 \text{ or } 6$$

については，sとtがparameterになる訳で，局所的には2次元あり，これらはすべて

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

を自己同型にもっている。orderを固定したときそのorderの自己同型をもつトーラスのfamilyのmoduliを調べるのも1つの問題となろう。

それにしても19世紀以来，さまざまの話題を提供して，今なお沢山の問題をかかえているアーベル多様体とは何と不思議なものであろう。楕円曲線の精緻を極めた深く美しい，さまざまの理論がアーベル多様体に完成されるのはいつのことであろうか。

§ 4. Appendix

本誌前号の最後の予想に関して次のことは言える。

定理 4. Gを$\mathbf{C}^n$の双正則変換群として，$\mathbf{C}^n/G = M$がコンパクト複素多様体になったとする。Gの各元fに対して，これのJacobian $J(f)$の絶対値$|J(f)|$について

$$\int_{\Delta_r} |J(f)|^2 dV(z) = O(r^{2n} \log r)$$

なら，Mの小平次元$\kappa(M) \leqq 0$である。ここに$\mathbf{C}^n$の座標を$(z^1, \cdots, z^n)$として，$\Delta r = \{ z \in \mathbf{C}^n \mid |z| < r \}$，$dV(z) = (\sqrt{-1}/2)^n \, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\overline{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^n$。

従って，特にGの各元がアフィン変換からなっていたら$\kappa(M) \leqq 0$といえる。

証明. $\pi : \mathbf{C}^n \to M$を被覆写像として，$M = \bigcup_j V_j$を局所座標によるMの被覆で，πによって$\mathbf{C}^n$の開集合と双正則同型になるようなものとする。vをMの体積要素として，$v_j = v | V_j$とおく。V_jの座標を$(z_j^1, \cdots, z_j^n)$とすると

$$v_j = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \varphi_j dz_j^1 \wedge \cdots \wedge dz_j^n \wedge d\bar{z}_j^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_j^n$$

であり，φ_j はV$_j$ 上正値連続関数である。ここでφ_j は各V$_j$ の上で有界であるとしてよい。（なぜなら，Mの任意の点Pに対して，P $\in$ V$_k$となるkがあり，φ_k が有界となるようなPのV$_k$ 内の近傍V(P)をとる。$\bigcup_P$V(P)＝Mで，Mはコンパクトより，上記の近傍有限個でMを被覆できる。）

さて

$$\pi^* v_j = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \cdot (\varphi_j \circ \pi) \cdot |\mathrm{J}(\pi)|^2 \cdot dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots$$
$$\wedge d\bar{z}^n$$

である。よって

$$\int_{\Delta r} \pi^* v = \int_{\Delta r} \pi^* \varphi \cdot |\mathrm{J}(\pi)|^2 d\mathrm{V}(z)$$

ところでφ_jは各v_j 上で有界なので，ある定数Cによって$\varphi_j <$ C がすべてのjについてなりたつ。つまり $\pi^*\varphi <$ C。 あと定理の仮定から

$$\int_{\Delta r} \pi^* v < \mathrm{C} \int_{\Delta r} |\mathrm{J}(\pi)|^2 d\mathrm{V}(z) = 0(r^{2n} \log r)$$

従って，次の補題から定理は証明された。 Q.E.D.

補題（〔1〕）. $\deg(f|\Delta r) = 0(r^{2n}\log r)$なら，(J)＝0でありかつ，すべての$m$について $\mathrm{P}_m \leqq 1$がなりたつ。

なお定理4に関して次のことが予想される。

問題. Mが$\mathbf{C}^n$を普遍被覆とするコンパクト複素多様体なら，κ(M)$\leqq 0$ であるか。もしMがケーラーならκ(M)＝0であるか。

文　　献

[1] 小平邦彦： Nevalinna理論，東大セミナリー・ノート，34.

[2] G. Shimura and Y. Taniyama : Complex multiplication of abelian varieties. Mathematical Society of Japan, Publication No.6.

[3] H. Yoshihara : On 2 – dimensional complex tori with many automorphisms. to appear
[4] H. Yoshihara : The structure of abelian surfaces with many automorphisms. to appear.