日本語学校論集6号
昭和53年10月31日

6次平面有理曲線について

吉原久夫

On the Plane Rational Curves of Degree 6

Hisao YOSHIHARA

The logarithmic Kodaira dimension introduced by S. Iitaka [1] plays an important role in the study of non-compact algebraic varieties. Especially it seems interesting to find the logarithmic Kodaira dimension $\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2\text{-}C)$, where C is an algebraic curve in $\mathbf{P}^2(C)$ with degree n. But it is difficult in the case when C is rational and has only one singular point which is a cusp, because we do not know whether such curves exist for $n \geqq 6$. We shall prove here the non-existence of such curves under the condition that n=6 and the multiplicity of the cusp is 2.

§1. 序論

完備と限らない代数多様体の研究に重要な役割を果たす，対数的小平次元の理論が飯高〔1〕によって創始された。特殊な場合であるが，Cを2次元複素射影空間$\mathbf{P}^2$内のn次の既約代数曲線とするとき，$\mathbf{P}^2-C$の対数的小平次元$\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2-C)$を求めることは1つの基本的な問題である。これについては若林〔2〕による次の結果がある。

定理．次の(1), (2), (3)の各々の場合について$\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2-C)=2$である。

(1) Cが有理でなく，$n \geqq 4$．

(2) Cが有理で少なくとも3つの尖点をもつ。

(3) Cが有理で少なくとも2つの特異点をもち，そのうち少なくとも1つは尖点

でない。

なお，Cが有理で2つの尖点をもつときは$\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2-C)\geqq 0$である。

但し尖点とは非特異モデル上に対応する点が1個きりない様な特異点のことである。上の定理では特にCが有理で特異点が1個のときが分らない訳であるが，これについては次の主張が得られた。

定理A. Cが1個の特異点をもち，その重複度をeとするとき，$n\geqq 3e$なら$\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2-C)=2$である。

ところで定理Aによると，最も簡単と思われる$n=6$，$e=2$の有理曲線が存在するかどうか問題である。なお，$e=2$で$n\leqq 5$の曲線は特異点を尖点と仮定しても勿論存在する。このような曲線の定義式の標準形は§3で与える。なおこれらの曲線については$\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2-C)=-\infty$となることも注意しておく。ところが$n=6$のときは，$n\leqq 5$のときと違って次のことが成りたつ。

定理B. 6次平面有理既約曲線で特異点は1個だけで，それが重複度2のものを考える。特異点が尖点でないものは存在して，高々6個である。しかし尖点となるものは存在しない。

定理A，Bの証明は各々§2，§4で与える。

以上の問題に関して有益な御助言を下さいました，東京大学教授飯高茂先生に深い謝意を表します。

§2. 定理Aの証明

まずこの小論で共通して用いられる記号を決めておこう。

$$S=S_t \xrightarrow{\pi_t} S_{t-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{P}^2$$

を中心が各々$P_1, \cdots, P_t$の2次変換とし，$\pi=\pi_t\circ\cdots\circ\pi_1$とおく。また$E_i$を$\pi_i$による例外曲線とし，$\pi_t\circ\cdots\circ\pi_{i+1}$による固有変換を$'$（ダッシュ）を付けて表わし，全変換は同じ記号で表わすとする。なおP^2上の曲線$\triangle$の$\pi_i\circ\cdots\circ\pi_1$による固有変換を$\triangle^{(i)}$と表わし，Hで$\mathbf{P}^2$の直線を表わすとする。

さて定理Aの証明に移ろう。$\pi^{-1}(\mathrm{C})=\overline{\mathrm{D}}$は単純正規交叉になっているとして，$e_i$を$\mathrm{C}^{(i)}$の$\mathrm{P}_i$における重複度とする。また$\overline{\mathrm{K}}$をSの標準直線束とすると，

$$\overline{\mathrm{D}}=\mathrm{C}'+\sum_{i=1}^{t}\mathrm{E}'_i\ ,\qquad \overline{\mathrm{K}}\sim -3\mathrm{H}+\sum_{i=1}^{t}\mathrm{E}_i$$

$$n\mathrm{H}\sim\mathrm{C}=\mathrm{C}'+\sum_{i=1}^{t}e_i\mathrm{E}_i$$

これより，$\overline{\mathrm{D}}+\overline{\mathrm{K}}\sim(n-3)\mathrm{H}-\sum_{i=1}^{t}(e_i-1)\mathrm{E}_i+\sum_{i=1}^{t}\mathrm{E}'_i$

従って上の関係から

$$n(\overline{\mathrm{D}}+\overline{\mathrm{K}})\sim(n-3)\mathrm{C}'+\sum_{i=1}^{t}(n-3e_i)\mathrm{E}_i+n\sum_{i=1}^{t}\mathrm{E}'_i$$

右辺は$n\geqq 3e_i$より正因子である。そこで，

$$kn(\overline{\mathrm{D}}+\overline{\mathrm{K}})\sim n(n-3)\mathrm{H}+(k-1)n(n-3)\mathrm{H}-kn\sum_{i=1}^{t}(e_i-1)\mathrm{E}_i$$
$$+kn\sum_{i=1}^{t}\mathrm{E}'_i$$

さて$n>3e$なら$k\gg 0$のとき　$n(n-3)\mathrm{H}+\overline{\mathrm{D}}_k$，$\overline{\mathrm{D}}_k>0$の形になる。$n=3e$のときは，$\mathrm{E}_i$は$\mathrm{E}'_i$の一次結合で表わされるから矢張り$k\gg 0$のとき上と同じ形になる。Hは直線であるから$\bar{\kappa}(\mathbf{P}^2-\mathrm{C})=2$を得る。Q.E.D.

§3. n≦5のときの標準形

この§では，n次($n\leqq 5$)平面有理曲線Cで，特異点は1個だけで，それが重複度2の尖点である曲線の定義式の標準形を与える。

(1)　$n=3$のときは　$f(x,y)=y^2-x^3$

(2)　$n=4$のときは

$$f(x,y)=(y-x^2)^2+axy^2+by^3-ax^3y+\left(\frac{1}{4}a^2-b\right)x^2y^2$$
$$+cxy^3+dy^4,\quad 但し\quad ab\neq 2c$$

(3)　$n=5$ のときは

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^2+axy+\frac{1}{4}a^2y^2-ax^3-\frac{1}{4}a^2x^2y$$

$$+bxy^2+\frac{1}{2}aby^2)+\frac{1}{4}b^2y^5,\quad \text{但し}\quad b\neq 0$$

さて，上の(1)，(2)，(3)はすべての例を与えていることを以下に証明しよう。まず(1)のときは射影変換によって上記の形にできることは良く知られている。次に(2)，(3)について。Cの方程式を

$$f(x,y)=y^2+\Sigma\, c_{ij}x^iy^j\ ,\qquad C_{30}=0$$

の形にしておく。

まず(2)について。$C^{(1)}$も接線は1本でなければならないから，$C_{21}^2=4C_{40}\neq 0$ を得る。この関係によって，適当な $\mathbf{P}^2$ の射影変換によって，$C_{40}=1$，$C_{21}=-2$ とできることが分る。あとは各2次変換で尖点の出る条件として上の結果を得る。次に(3)に入る前に補題を1つ。

補題1.　§2の記号の下で，任意の $n\in\mathbf{N}$，$n_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ に対して，

$$l(nH-\sum_{i=1}^{t}n_iE_i)=\dim H^0(S,\mathcal{O}(nH-\sum_{i=1}^{t}n_iE_i))$$

$$\geqq\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{2}n_i(n_i+1)$$

証明.　〔1〕を参照せよ。

さて(3)の証明に入ろう。§2における π がCの最短の特異点解消を与えているとすると，$\pi^*C=C+2E_1+\cdots\cdots+2E_6$ であり，そこで $D=E_1+\cdots\cdots+E_5$ とおくと，$l(2H-D)\geqq 1$。よって $2H\sim D+\Gamma'$ となるS上の正因子 Γ' がある。$\Gamma=\pi_*(D+\Gamma')$ とおくと，

補題2. 上のΓは既約である。

証明. Γが2本の直線からなると仮定しよう。このとき$C_{40}=0$でなければならない。なぜならもし$C_{40}\neq 0$とすれば，$C^{(1)}$と$\Gamma^{(1)}$とは交わったとしても接線が異なる。従ってΓから出る例外曲線は高々$2E_1+2E_2$であり，Dの形からこれは不可能である。従って$C_{40}=0$である。するとfは既約であるから，$C_{50}\neq 0$である。これではfは2回の2次変換で非特異となってしまうので矛盾である。

Q.E.D.

従ってΓを$y=x^2$としておく。Dの形より原点でのCとΓの交点数は10である。これよりfは次の形であるとしてよい。

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^2+a_1xy+a_2y^2+a_3x^3+a_4x^2y+a_5xy^2+a_6y^3)+a_7y^5$$

これが各2次変換で尖点の出る条件として上記の形を得る。

注意3. (2), (3)は射影変換によってもっとパラメータの数を減らせる可能性を残しているのであるが，今はその時間がない。今後そのパラメーターの最小数の研究をする予定である。（最後の追加のところ参照。）

§4. 定理Bの証明

いま6次平面有理曲線で特異点は重複度2のものが1個だけのCが存在したとしよう。§2の記号でπはCの最短の特異点解消を与えているものとする。従って$\pi^*C=C'+2E_1+\cdots\cdots+2E_{10}$としてD$=2E_1+E_2+\cdots\cdots+E_7$とおくと補題1から$l(3H-D)\geqq 1$。従ってS上の正因子$\Gamma'$で$3H\sim D+\Gamma'$となるものがある。$\Gamma=\pi_*(\Gamma'+D)$とおく。なおCの方程式は，

$$f(x,y)=y^2+\sum_{i+j=3}^{6}C_{ij}x^iy^j\ ,\qquad C_{30}=0$$

としておく。このとき次のことがなりたつ。

（甲） Γが3本の直線なら $C_{40}=0$である。
（乙） Γが1本の直線と2次曲線△のときは，$C_{40}\neq 0$であって，

$$\left|\begin{array}{l} \qquad \pi^*\triangle=\triangle'+E_1+\cdots\cdots+E_k,\ k\geqq 6 \text{ である。従って実は } k=6\text{。} \\ \text{(丙)}\quad \Gamma \text{ が3次曲線のときは,} \Gamma \text{ の方程式は } xy=x^3+y^3 \text{ としてよい。} \end{array}\right.$$

これを証明しよう。

(甲)について： $C_{40}\neq 0$ と仮定すると，例外曲線は高々 $3E_1+3E_2$ きり出ないのでDの形から不可能である。

(乙)について： $C_{40}=0$ と仮定すると，$C_{60}\neq 0$ より1本の直線から出る例外曲線は高々 $E_1+E_2+E_3$ であり，E'_7 の数をDと比較して $3+k\geqq 8$, $k\geqq 5$ を得る。そこで2次曲線△の方程式を $h(x,y)=y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2$ としたとき，$C_{40}=0$ より $\triangle^{(1)}$ の接線は $y=0$ であり，従って $a_{20}=0$ でなければならない。すると△は可約になってしまって矛盾である。よって $C_{40}\neq 0$ であり，1本の直線から例外曲線は高々 E_1+E_2 きり出ない。上と同様にして，$k\geqq 6$ を得る。Cは6次なので交点数を考えると $k=6$ となる。

(丙)について： Dの形から Γ は原点が特異点である。すると Γ は $y^2=x^3$ か又は $xy=x^3+y^3$ とできるが，前者は π_1 によって $y^2=x$ となるので，$\Gamma^{(1)}$ と $C^{(1)}$ の接線が異なってしまうので不可能である。

以下(甲),(乙),(丙)の各場合について定理Bを証明する。その前に1つ定義をしておく。

<u>定義4.</u> $\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots\cdots,\ \pi_{10}$ は次のような2次変換からなっているとする。

$$\begin{cases} x=x_1 \\ y=x_1y_1 \end{cases},\quad \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1-d_1x_1=x_2y_2 \end{cases},\quad \cdots\cdots,\quad \begin{cases} x_9=x_{10} \\ y_9-d_9x_9=x_{10}y_{10} \end{cases}$$

このとき，$(-d_1,\ \cdots,\ -d_9)$ を2次変換 π の型ということにする。

(甲) $C_{40}=0$ のとき。

このときは特異点が尖点であろうとなかろうと曲線は存在しないことを証明する。まず補題を。

<u>補題5.</u> $C_{40}=0$ のとき，上の定義の記号で $d_1=0,\ d_2=1,\ d_3=0,\ d_5=0$ であるとしてよい。

<u>証明.</u> 新たに $D=E_1+\cdots\cdots+E_8$ とおいて $l(3H-D)\geqq 2$ を得る。今までと同様に，$3H\sim D+\Gamma'$，$\Gamma=\pi_*(D+\Gamma')$ とおく。Γ として既約なものを取

れることを示す。まずΓが1本の直線と2次曲線にならないことの証明は上記（乙）の証明と同様にしてできる。さてΓが3本の直線になるのは高々1次元きりない。つまり$y^3=0$以外で最も例外曲線がでるのは$(ax+by)y^2=0$, $a\neq 0$，の形のときであるが，これでは，$C_{60}\neq 0$だから$3E_1+2E_2+2E_3$でDの形とくらべて不可能である。従って以上を考慮すると，3次曲線は少なくとも1次元は存在する。そこで3次既約なΓの方程式をgとする。$C_{40}=0$よりgの最低次数は1である。よって

$$g(x,y)=y+\sum_{i+j=2}^{3} a_{ij}x^i y^j$$

とおく。$C_{40}=0$より$\Gamma^{(1)}$の接線も$y=0$。よって$a_{20}=0$を得る。つまり原点はΓの変曲点である。従ってgは射影変換によって次のいずれかにできる。

(i) $y=x^3$

(ii) $y=x^2(x+y)$

(iii) $y=x(x-y)(x-\lambda y)$, $\lambda\neq 0,1$

なお，このようにgを変換した後もfは§の初めにあげた形であるとしてよいことを注意しておく。さて(i), (ii), (iii)の2次変換を実際に行う。Dの形よりπ_6まで接線がCの固有変換と一致しているので，補題の結果を得る。　Q.E.D.

従って $C_{40}=0$のとき，πは

$$\begin{cases} x=x_{10} \\ y=x_{10}^3(x_{10}^7y_{10}+d_9x_{10}^7+d_8x_{10}^6+d_7x_{10}^5+d_6x_{10}^4+d_4x_{10}^2+1) \end{cases}$$

としてよい。そこで$f(x,y)$をx_{10}, y_{10}で表わす。簡単のため$x_{10}\to x$, $y_{10}\to y$と表わして，

$$f^*(x,y)=x^6(x^7y+d_9x^7+\cdots\cdots+1)^2+\sum_{i+j=3}^{6} C_{ij}x^{i+3j}(x^7y+d_9x^7+\cdots\cdots+1)^j$$

とおく。ここで$C_{40}=C_{21}=C_{50}=0$, $C_{60}\neq 0$。さてCの存在の仮定よりπ^*Cからは$2E_1+\cdots\cdots+2E_{10}$が出るから$f^*(x,y)$は$x^{20}$で割り切れ，また$x^{20}$の係数は0でなく，C′が非特異だから$x^{21}$または$x^{20}y$の係数は0で

ない。つまり

ⓐ　x^6, x^7, …, x^{20}, $x^{13}y$, …, $x^{19}y$の係数は0であり,

ⓑ　x^{21}または$x^{20}y$の係数は0でない。

ところがⓐを仮定するとⓑは成立しないことが(かなり複雑な)計算の結果分る。従って(甲)の場合には曲線は存在しないことが分った。計算は長いので省略する。

(乙)のとき

この時も特異点が尖点であろうとなかろうと曲線は存在しないことを証明する。

2次曲線△の方程式が$y=x^2$であるように射影変換しておく。従って,まず2次変換πの型は(-1, 0, 0, 0, *, …, *)であり,また△とCは原点での交点数が12だから,fは次の形に書ける。

$$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^2+a_1xy+a_2y^2+a_3x^3+a_4x^2y+a_5xy^2+a_6y^3+a_7x^4+a_8x^3y+a_9x^2y^2+a_{10}xy^3+a_{11}y^4)+by^6$$

またπの型によって,

$$\begin{cases} x=x_{10} \\ y=x_{10}^2(x_{10}^8y_{10}+d_5x_{10}^8+d_4x_{10}^7+d_3x_{10}^6+d_2x_{10}^5+d_1x_{10}^4+1) \end{cases}$$

である。(甲)と同様に$f(x,y)$をx_{10}, y_{10}で表わし,簡単のために$x_{10}\to x$, $y_{10}\to y_1$と表わして$f^*(x,y)$はCの存在を仮定すると,次のⓒ,ⓓの条件を満さなくてはならない。

ⓒ　x^4, x^5, …, x^{20}, $x^{12}y$, …, $x^{19}y$の係数は0であり

ⓓ　x^{12}または$x^{20}y$の係数は0でない。

ところが,ⓒを仮定するとⓓがなりたゝないことが計算で分る。従って(乙)の場合も曲線は存在しないことが分った。

(丙)のとき

この時は,特異点に尖点という仮定をすると曲線は存在しない。しかし尖点でない曲線は存在してそれらは高々6個であるということを証明する。(後者の曲線は$C^{(9)}$が通常2重点を特異点とするわけである。)

さてΓ : $xy=x^3+y^3$の2次変換を行うことによって,πの型は(-1, 0, 0, -1, 0, -1, 0, $-d_1$, $-d_2$, $-d_3$, $-d_4$)としてよい。なぜならΓとCの固有変換は6回目の2次変換まで接線を共有するからである。あとは今までと同様,

$$\begin{cases} x = x_{10} \\ y = x_{10}^2(x_{10}^8 y_{10} + d_4 x_{10}^8 + d_3 x_{10}^7 + d_2 x_{10}^6 + d_1 x_{10}^5 + x_{10}^3 + 1) \end{cases}$$

をfに代入して，f^*を得る。Cの存在の仮定より（乙）のⓒ，ⓓの条件を満さなくてはならない。（丙）の場合の計算が一番複雑なのでその要点だけでも書いておこう。ⓒの条件より，まず

$C_{21} = -2$，$C_{40} = 1$，今，$C_{12} = a$，$C_{22} = b$，$C_{03} = c$，$C_{13} = p$，$C_{04} = q$，$C_{14} = r$，とおくと，$C_{50} = a$，$C_{31} = -2a$，$C_{60} = b + 2c$，$C_{41} = -2b - 3c$，$C_{32} = -2p - 2$，$C_{51} = p + 2$，$C_{23} = -2q - 2a$，$C_{42} = q + 2a$，$C_{33} = -r$，$C_{24} = 3 + p$，$C_{15} = a$，$C_{06} = -b - 3c - r$，$C_{05} = -2 - p$。

を得るが，これらの関係は

$$2d_1 + 2b + 6c + r = 0$$

$$2d_2 + 2d_1 a + p - 2 = 0$$

$$2d_3 + 2d_2 a + 2d_1(b + 3c) + 2q - 3a = 0$$

$$d_1^2 = q + a$$

$$2d_1 d_2 + d_1^2 a + 17c + 3r + 6b = 0$$

$$d_2^2 - d_1\{(b + 3c)d_1 + 2q - 3a\} + 3p + 2 = 0$$

$$d_2(-2d_3 - d_2 a) + d_1\{d_1(p - 2) - 6b - 15c\} + 2q + 8a = 0$$

$$d_3^2 - d_2\{d_2(b + 3c) + d_1(2p - 4) - 6b - 15c\} - d_1\{d_1(q - 4a) - 5p - 4\} + 12r + 15(b + 3c) = 0$$

$$d_3\{d_3 a + 2d_2(b + 3c) + 2d_1(p - 2) - 6b - 15c\} + d_2\{d_2(p - 2) + 2d_1(q - 4a) - 5p - 4\} + d_1\{3d_1(c + r) + 6q + 14a\} + 8 + 6p = 0$$

$$d_4\{d_4 + 2d_3 a + 2d_2(b + 3c) + 2d_1(p - 2) - 6b - 15c\} + d_3\{d_3(b + 3c) + 2d_2(p - 2) + 2d_1(q - 4a) - 5p - 4\} + d_2\{d_2(q - 4a) + 6d_1(c + r) + 6q + 14a\} + d_1\{d_1(-p - 2) - 21r - 30(b + 3c)\} + q + 10a = 0$$

以上の方程式より，$d_1 = 0$のときは$d_2 = 2$または$d_2 = 4$を得る。このときはx^{21}，$x^{20}y$の係数ともに0となる。そこで$d_1 \fallingdotseq 0$のときを考える。このとき，$d_2 = 7/2$なら$d_1 d_3 = d_1^3 + 3/4$であり，同様に曲線は存在しない。そこで$d_2 \fallingdotseq 7/2$のとき

$$a=\frac{(d_2-2)(d_2-4)+d_1d_3-d_1^3}{d_1(\frac{7}{2}-d_2)}$$

を得る。これを用いると$d_1d_3=d_1^3+(d_2-2)(d_2-3)$かまたは$d_1^3+(d_2-3)(d_2-4)=0$を得る。前者のときは，$x^{21}$，$x^{20}y$の係数はともに0になってしまうことが分る。そこで後者のときを考える。このとき，まず

$$d_1d_3=\frac{2(d_2-3)(d_2-4)^2}{7-2d_2}$$

を得て，上記一連の式の中の最後から2番目の式から$4d_2^2-30d_2+55=0$を得る。最後の式はd_2の2次式であるが，以上のd_1，d_2，d_3の値を代入すると，2つの異なる根をもつ。つまり$C^{(9)}$の特異点は通常2重点でなければならない。従って尖点ということは起りえないことが分った。さて，これらの値は$x^{20}y$の係数を0にしないことが分る。従ってこの場合に限って曲線は存在する。d_1，d_2の値に応じて6個の曲線ができる。これらをすべて書いてみよう。

$$a=2d_1^2(8d_2-33),\quad b+3c=(-12d_2+45)d_1$$
$$c=(3d_2-\frac{23}{2})d_1,\quad p=-4d_2+13,\quad r=(24d_2-92)d_1,$$
$$q=(-16d_2+67)d_1^2$$

これよりすべての係数がきまる。

注意6. （丙）の場合に作られた6個の曲線は互いが射影変換で移りあうかもしれない。この理由によって高々6個という表現にしたのである。なお，この場合も注意3と同様，キチンと何回かを研究する余地があるのだが，今後にしたいと思う。

§5. おわりに

$n\geqq 3e$ なる一般の場合に定理Bはどうなるかというと，全然分らない。多分尖点と仮定すればないだろうという予想 — というより妄想きりできない。この論文の方法は計算にたよるところが大きいため，本質が見えにくくなっている部

分がある。実際に（丙）の計算は容易でない。今年の夏休みまで数ケ月計算ばかり毎日続いた。それでもなお続けられたというのはやり始めたからには完成しなくてはという意地と，真実は何か知りたいという passion と，飯高先生の激励であった。しかしたいして非存在の本質に近づいた様な気がしない。まだまだ始まったばかりで，これからだという感じである。

なおこの論文の骨子は，１２月に城崎で開催予定の代数幾何学シンポジュームで発表する予定のものであることをお断りしておく。

文　献

[1] S. Iitaka : On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties. Complex Analysis and Algebraic Geometry, IWANAMI, Tokyo (1977), 175 – 189.

[2] I. Wakabayashi : On the logarithmic Kodaira dimension of the complement of a curve in $\mathbf{P}^2$. Proc. Japan Acad., 54(1978), 157–162.

追加

原稿締め切り後，注意３に関して次のことが証明できた。つまり，４次または５次の既約有理平面曲線で特異点は重複度２の尖点１個だけもつものは，$\mathbf{P}^2$ の射影変換で次の形にできる。

(1)　$f(x,y)=(y-x^2)^2+xy^3$

(2)　$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^2+2xy^2)+y^5$

つまり，実はパラメーター a，b などは見かけだけのもので存在しないのである。この証明は $\mathbf{P}^2$ の射影変換が原点（０，０，１）を動かさず，また，$y^2-2x^2y+x^4$ の項を不変にするという仮定をつけられるので，

$$\begin{pmatrix} p & q & o \\ o & r & o \\ s & t & u \end{pmatrix}$$

という形にできるということを用いてなされる。かなり長くなるので，ここでは省略する。いずれどこかに発表する予定である。この問題は定理Ｂとも関係して，一般的に述べると次のようになろう。

問題1. Cを平面曲線として，$P \in C$のとき，$C - \{P\}$と$\mathbf{A}^1$が双正則同型になるとき，Cをすべて求めよ。更にCの定義式において必要なパラメーターの数はいくつになるか。

なお，Abhyankar-Moh によって，これと若干似た問題が取りあげられている。即ち，Hを直線としたとき，$C - C \cap H$が$\mathbf{A}^1$と双正則同型なら，$\mathbf{A}^2$の座標系を適当にとって，Cをx軸に選ぶことができる。

注意6についても，実はちょうど2個存在することが証明できた。それはd_2を与えたときd_1は異なる3個の値を取るのであるが，これらによってできる 曲線は矢張り$\mathbf{P}^2$の射影変換で移りあうのである。以上の問題を一般化すると次のような問になる。

問題2. 平面n次有理曲線が特異点を1個だけもちその重複度をeとする。このような曲線の定義式に表われるパラメーター数は（nとeを固定したとき）$\mathbf{P}^2$の射影変換で最低何個までできるか。

この問は，$n = 4$又は5で$e = 2$のときは1になり$n = 6$，$e = 2$のとき0になることが分る。特異点をもつ場合へのmoduliの問題の一般化なのである。